6 Vecteurs, colinéarité, produit scalaire

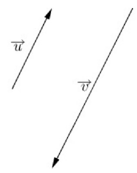
Aperçu historique :

Sur les bases jetées par la géométrie grecque et l'algèbre babylonienne, ainsi que sur les travaux des Chinois et des Arabes, ***Pierre de Fermat*** *(1601 - 1665), et* ***René Descartes*** *(1596 - 1650) utilisent des systèmes de coordonnées pour étudier notamment des problèmes géométriques.*
*C'est la géométrie analytique, qu'****Isaac Newton*** *(1643 - 1727) développera et utilisera en astronomie : cette application est à l'origine du terme "vecteur". Mais il faudra attendre la première moitié du XIXe siècle pour que* ***Bernard Bolzano*** *(1781 - 1848) formalise la notion de vecteur.*
Puis ***Jean-Victor Poncelet*** *(1788 - 1867) et* ***Michel Chasles*** *(1793 - 1880) affineront les travaux de Bolzano à partir de la géométrie projective. Enfin, la formalisation encore actuellement enseignée, est l'œuvre de* ***Giusto Bellavitis*** *(1803 - 1880).*

1. Vecteurs colinéaires

A. Définition et premières propriétés

Définition 6.1 Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

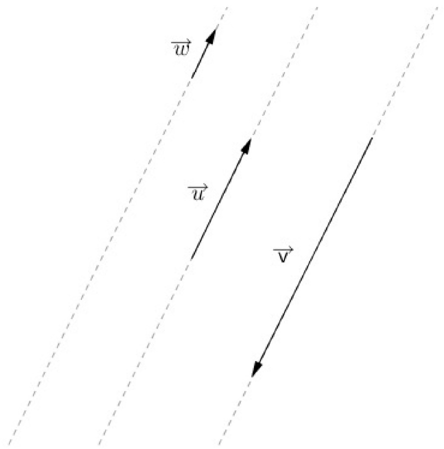


Étymologiquement, colinéaire signifie "sur une même ligne" : deux vecteurs sont colinéaires si on peut en trouver deux représentants situés sur une même droite.

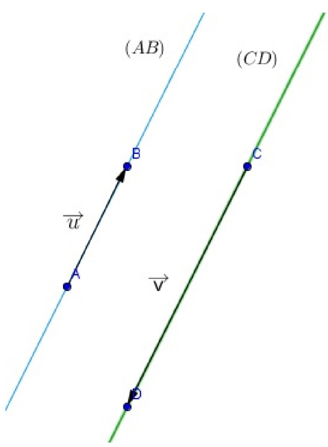
Convention : Le **vecteur nul** est colinéaire à tous les vecteurs.

Conséquences immédiates :

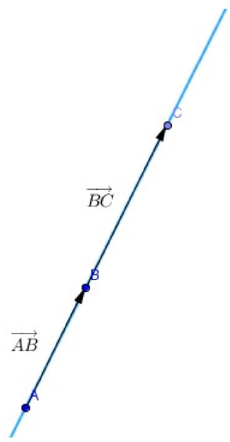
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont même direction
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Trois points distincts A, B et C sont alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires



$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires



$(AB)//(CD)$



A, B, C sont alignés

B. Caractérisation analytique

Propriété 6.1 Dans un repère, les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires ssi $xy'-x'y=0$.

Démonstration :*Pour démontrer que ces deux propositions sont équivalentes, on va démontrer une double implication.*
Dans un repère, soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$.
1) Montrons que si les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires alors $xy'-x'y=0$.
- si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, alors $x=0$ et $y=0$ donc $xy'-x'y=0$.
- si $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, alors $x'=0$ et $y'=0$ donc $xy'-x'y=0$.
- si $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont non nuls, alors puisque $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires, il existe un réel k tel que donc $x'=kx$ et $y'=ky$ donc $xy'-x'y=x(ky)-(kx)y=kxy-kxy=0$.
On a démontré que si $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires, alors $xy'-x'y=0$.
1) Réciproquement, montrons que si $xy'-x'y=0$, alors les vecteurs $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires.
Supposons donc que $xy'-x'y=0$.
- Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à tous les vecteurs donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, alors l'une de ses coordonnées au moins est non nulle :
Si il s'agit de x, alors $xy'-x'y=0$ implique $y'=\frac{x'}{x}y$ et donc on a exhibé un réel $k=\frac{x'}{x}$ tel que $y'=ky$. De plus, $x'=\frac{x'}{x}x$, donc on a aussi $x'=ky$. Finalement, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
S'il s'agit de y, on montrerait de même que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
On a démontré que si $xy'-x'y=0$, alors $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires.
Conclusion : Les propositions "$\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ sont colinéaires", et "$xy'-x'y=0$" sont équivalentes.

Notations : On note les *implications* avec cette flèche : $\Longrightarrow$. Ainsi, "Si A, alors B" se note : $A\Longrightarrow B$.
On note les *équivalences* avec cette flèche : $\Longleftrightarrow$. Ainsi, "A si et seulement si B" se note : $A\Longleftrightarrow B$.

Exemple : Soit α un réel. Pour quelles valeurs éventuelles de α les vecteurs $\overrightarrow{u}(\alpha+2;8)$ et $\overrightarrow{v}(2;\alpha-2)$ seront-ils colinéaires ?
Ici, $xy'-x'y=(\alpha+2)\times(\alpha-2)-2\times 8$, donc :

$$\begin{array}{rrcl} & xy'-x'y & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & (\alpha+2)\times(\alpha-2)-2\times 8 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \alpha^2-4-16 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \alpha^2 & = & 20 \end{array}$$

Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ssi $\alpha=2\sqrt{5}$ ou $\alpha=-2\sqrt{5}$.

2. Rappels sur les repères, notion de base, expression d'un vecteur dans une base

Rappel : On appelle repère du plan la donnée de trois points O, I, J du plan, non alignés.

Ces trois points vont permettre de construire un système de coordonnées dans le plan.
On dit parfois que l'on a un triplet (O ;I ;J).

Rappel : On dit que le repère (O ;I ;J) est orthonormé ssi* OI=OJ=1, et (OI)⊥(OJ).

*ssi est une abréviation pour "si et seulement si".
"Ortho" signifie "droit" : les droites (OI) et (OJ) forment un angle droit.
"Normé" signifie "de même norme", c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont de même norme : $\|\overrightarrow{OI}\|=\|\overrightarrow{OI}\|$, c'est-à-dire $OI=OJ$.

Voici un repère orthonormé (figure 1), et à titre de curiosité : un repère orthogonal, mais non normé (figure 2), un repère normé, mais non orthogonal (figure 3).

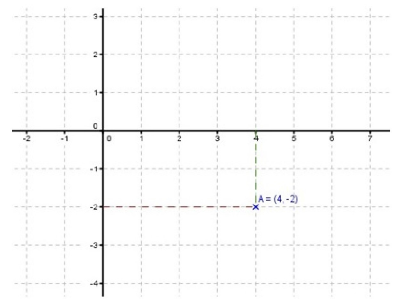


figure 1

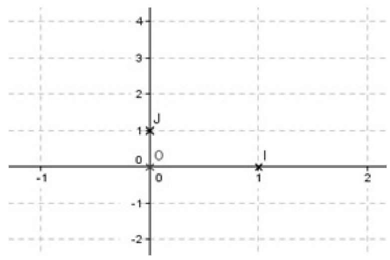


figure 2

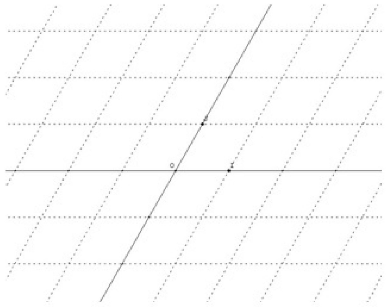
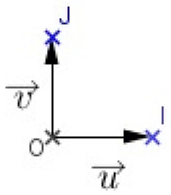


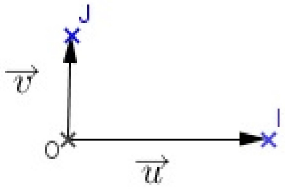
figure3

> **Définition 6.2** On appelle base du plan la donnée de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan **non colinéaires**.
> On note $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ cette base.

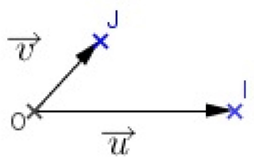
Remarque importante : Si l'on dispose déjà d'un repère $(O; I; J)$, le couple de vecteurs $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est une base : c'est la **base associée au repère** $(O; I; J)$. Si le repère est orthogonal, normé ou orthonormé, la base associée sera dite respectivement orthogonale, normée ou orthonormée.



base orthonormée



base orthogonale



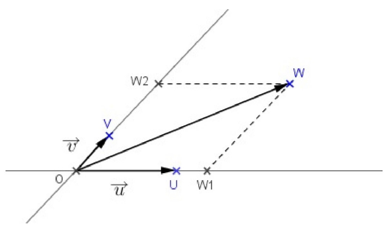
base quelconque

> **Théorème 6.1** Soit $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ une base du plan.
> Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ du plan, il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tel que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.
> Le couple $(a; b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Les coordonnées d'un vecteur dans une base sont parfois appelées **composantes** du vecteur dans cette base.

Démonstration

Soient $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ une base du plan et $\overrightarrow{w}$ un vecteur de ce plan.
On va montrer d'abord l'existence, puis l'unicité du couple de coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.



1) Existence. *On va "construire" les nombres a et b pour montrer qu'ils existent.*
Soit O un point quelconque du plan, et soient U, V, W les points définis par $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{w}$.
Par définition d'une base, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, donc (OU) et (OV) ne sont pas parallèles, et la parallèle à (OV) passant par W coupe la droite (OU) en un unique point W_1.
De la même manière, la parallèle à (OU) passant par W coupe la droite (OV) en un unique point W_2.
Par construction, OW_1WW_2 est un parallélogramme (éventuellement aplati), donc $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OW_1} + \overrightarrow{OW_2}$ (*)
Or $\overrightarrow{OW_1}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, donc il existe un réel a tel que $\overrightarrow{OW_1} = a\overrightarrow{u}$. De même, il existe un réel b tel que $\overrightarrow{OW_2} = b\overrightarrow{v}$.
Dans l'égalité (*), il vient : $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, on a construit les réels a et b, ce qui assure leur existence.
2) Unicité. *On va raisonner par l'absurde pour montrer l'unicité du couple $(a; b)$, en supposant qu'il en existe deux, pour aboutir à une contradiction.*
Supposons qu'il existe deux couples distincts de réels $(a; b)$ et $(a'; b')$ tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w} = a'\overrightarrow{u} + b'\overrightarrow{v}$.
Alors $a\overrightarrow{u} - a'\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{w} - b\overrightarrow{v}) - ((\overrightarrow{w} - b'\overrightarrow{v}) = -b\overrightarrow{v} + b'\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire $(a - a')\overrightarrow{u} = (b' - b)\overrightarrow{v}$.

Or $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ($(\vec{u};\vec{v})$ est une base), donc :

$$\begin{cases} a-a'=0 \\ b'-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=a' \\ b'=b \end{cases}$$ ce qui contredit le fait que $(a;b)$ et $(a';b')$ soient distincts.

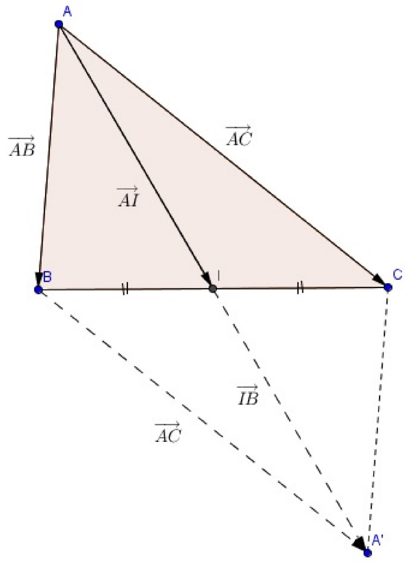
Donc la décomposition $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$ est unique.

Rappel : Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B, I, on a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$.

Exemple de la médiane :

Soient ABC un triangle, et I le milieu de $[BC]$.
Alors $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
En effet : en appliquant la relation de Chasles, on a :
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$, donc : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$(*).
Or I est le milieu de $\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IC}$, d'où $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Dans (*), il vient : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}+\vec{0}$, i.e. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$.
D'où, en divisant par 2 chaque membre : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
Or ABC est un triangle, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : ils forment une base du plan.
D'après ce qui précède, les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ dans cette base sont : $\overrightarrow{AI}(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

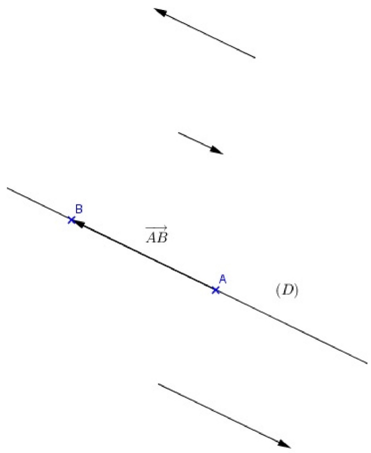


3. Équations cartésiennes d'une droite

A. Vecteurs directeurs d'une droite

Définition 6.3 Soit (D) une droite du plan. On appelle vecteur directeur de (D) tout vecteur non nul ayant la même direction que (D).

Remarques :
- Une droite possède une infinité de vecteurs directeurs, qui sont tous colinéaires entre eux, puisque de même direction.
-Si A et B sont deux points distincts de la droite (D), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeurs de (D).



Conséquences :
- On peut *définir une droite* par la donnée *d'un point et d'un vecteur directeur*. Par exemple ici, (D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
- On a alors la caractérisation suivante pour les points de (D) :
$M \in (D) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

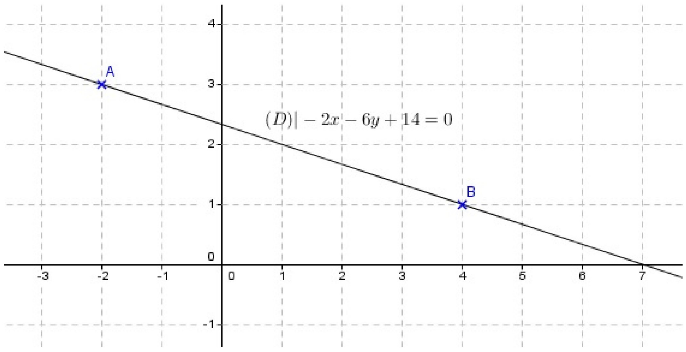
B. Équations cartésiennes d'une droite

Théorème 6.2 Dans un repère, toute droite (D) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
Une telle équation est appelée équation cartésienne de (D),
et le vecteur $\overrightarrow{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D).

Démonstration Soient (D) une droite, $A(x_A; y_A)$ un point de (D), et $\overrightarrow{v}(\alpha; \beta)$ un vecteur directeur de (D).
On a : $M(x; y) \in (D) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\iff x_{\overrightarrow{AM}}.y_{\overrightarrow{v}} - y_{\overrightarrow{AM}}.x_{\overrightarrow{v}} = 0$
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donc :
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires
$\iff (x - x_A) \times \beta - (y - y_A) \times \alpha = 0$
$\iff \beta x - \alpha y + (-\beta x_A + \alpha y_A) = 0$
Donc, en posant $a = \beta$, $b = -\alpha$, et $c = (-\beta x_A + \alpha y_A)$, la droite (D) admet bien une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.
De plus, $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (D), donc $\vec{v}$ est non nul, i.e. $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$.
Comme $(\alpha; \beta) = (-b; a)$, cela équivaut à la condition $(a; b) \neq (0; 0)$.

Remarques :
- La droite (D) possède une infinité d'équations cartésiennes ; il suffit pour s'en convaincre de multiplier chaque membre de l'équation $ax + by + c = 0$ par une constante non nulle quelconque.
- Le cas $a = 0$ correspond à une droite horizontale.
- Le cas $b = 0$ correspond à une droite verticale.
- Pour retrouver la formulation $y = mx + p$ (**équation réduite**), il suffit de diviser l'équation par b, ce qui interdit le cas $b = 0$. Les équations de la forme $y = mx + p$ ne couvrent donc pas le cas d'une droite verticale.

Exemple :



Déterminons une équation cartésienne de la droite (AB), avec $A(-2;3)$ et $B(4;1)$.
On a : $\overrightarrow{AB}(6;-2)$ est un vecteur directeur de (AB), donc on peut poser $-b=6$ et $a=-2$.
Ainsi, la droite (AB) admet une équation cartésienne de la forme $-2x-6y+c=0$.
Pour déterminer le nombre c, on écrit dans cette équation que le point $A(-2;3)$ appartient à (AB) :
$-2x_A - 6y_A + c = 0$
$\Longleftrightarrow -2\times(-2) - 6\times 3 + c = 0$
$\Longleftrightarrow 4 - 18 + c = 0$
$\Longleftrightarrow c = 14$
Donc une équation cartésienne de la droite (AB) est $-2x-6y+14=0$.
Autre réponse : en simplifiant cette égalité (ou encore le vecteur directeur de départ) par -2, on obtient l'équation cartésienne : $x+3y-7=0$, qui est une autre équation cartésienne de la même droite.
Pour vérifier nos calculs, on peut mettre les coordonnées de B dans l'équation.

Le théorème suivant est la réciproque du théorème **??**

Théorème 6.3 Soient a, b, c des réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$. Dans un repère, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

Démonstration Soient a, b, c des réels tels que $(a;b) \neq (0;0)$. Soit E l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $ax+by+c=0$.

1) Montrons que l'ensemble E contient au moins un point.
- Si $b \neq 0$, alors $ax+by+c=0 \Longleftrightarrow \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0 \Longleftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. En choisissant un réel x_A quelconque, il suffit donc de poser $y_A = -\frac{a}{b}x_A - \frac{c}{b}$ pour que le point $A(x_A;y_A)$ appartienne à E, qui n'est donc pas vide.
- Si $b=0$, alors la condition $(a;b) \neq (0;0)$ assure que $a \neq 0$. Il vient :
$ax+by+c=0 \Longleftrightarrow ax+c=0 \Longleftrightarrow x = -\frac{c}{a}$. Ainsi, en choisissant un réel y_A quelconque, le point $A(-\frac{c}{a};y_A)$ appartient à E, qui n'est donc pas vide.
On a montré que dans tous les cas $E \neq \emptyset$.

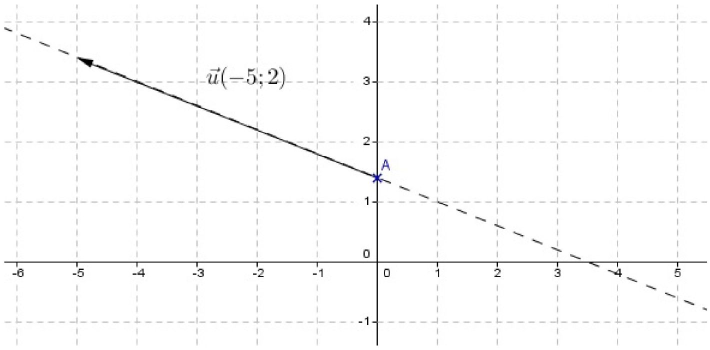
2)Montrons que l'ensemble E est bien une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.
- Montrons que si un point appartient à E, alors il appartient à une droite donnée.
Soit $A(x_A;y_A)$ un point de E, on a : $ax_A + by_A + c = 0$(1). Soit $M(x;y)$ tel que $ax+by+c=0$(2).
En soustrayant membre à membre les équations (2) et (1), il vient : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$, ce qui traduit exactement que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}(-b;a)$ sont colinéaires, c'est-à-dire que le point M appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$ passant par le point A.
- Montrons que tous les points de cette droite appartiennent bien à E.
Les coordonnées de tous les points de cette droite vérifient (1) car : $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}(-b;a)$ sont colinéaires
$\Longrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
$\Longrightarrow ax+by-(ax_A+by_A)=0$, or d'après (1) : $ax_A+by_A=-c$,
D'où $ax+by+c=0$, et les coordonnées de M vérifient bien l'équation (2).

L'ensemble E est donc bien l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$, et c'est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

N.B. : On peut aussi démontrer qu'il s'agit d'une droite en se ramenant à l'équation réduite vue en classe de seconde.

Remarque : Une droite donnée admet une infinité d'équations cartésiennes, mais son équation réduite est unique.

Exemple : Déterminons l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $2x + 5y - 7 = 0(*)$.
D'après ce qui précède, il s'agit d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-5; 2)$.
Il suffit de trouver un point appartenant à cette droite, et celle-ci sera parfaitement déterminée.
Pour simplifier les calculs, choisissons par exemple $x = 0$. Dans (*), il vient : $5y - 7 = 0$, c'est-à-dire $y = \frac{7}{5}$.
Il s'agit donc de la droite passant par $A(0; \frac{7}{5})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-5; 2)$.

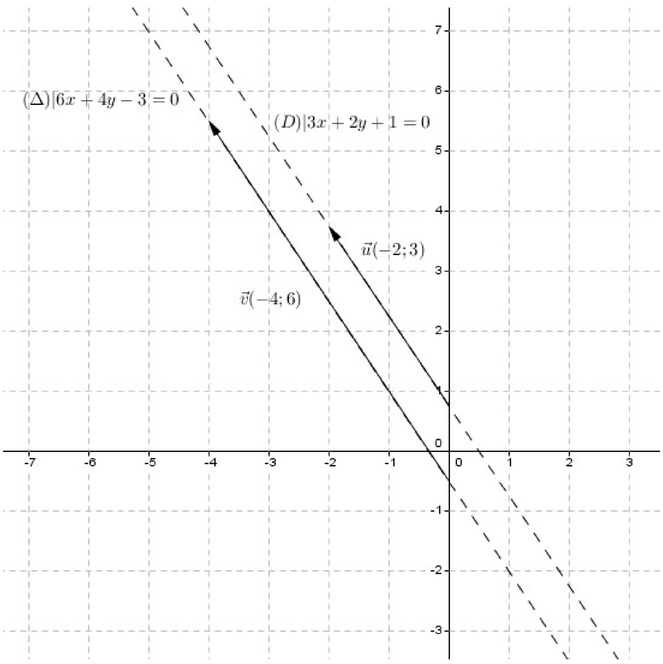


C. Caractérisation de deux droites parallèles

Propriété 6.2 Deux droites $(D)|ax + by + c = 0$ et $(\Delta)|a'x + b'y + c = 0$ (avec $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$) sont parallèles ssi $ab' - a'b = 0$.

Démonstration $(D)//(\Delta)$ ssi leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(-b; a)$ et $\vec{v}(-b'; a')$ sont colinéaires, c'est-à-dire ssi $ab' - a'b = 0$.

Exemple : Soient $(D)|3x + 2y + 1 = 0$ et $(\Delta)|6x + 4y - 3 = 0$.
On a : $3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$, donc ces droites sont parallèles.



4. Fiche de synthèse sur la colinéarité et les équations de droites

A. Rappels

Longueur d'un segment, norme d'un vecteur : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Coordonnées du milieu d'un segment : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$
Coordonnées d'un vecteur : $\vec{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array}\right.$

B. Colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\exists k \in \mathbb{R}$ tq $\vec{u} = k\vec{v}$
Si $\vec{u}\left|\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{array}{l} x' \\ y' \end{array}\right.$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $xy' - x'y = 0$

C. Équations de droites

Équation réduite

$y = mx + p$ (droite non verticale) ; m est le coefficient directeur, et p l'ordonnée à l'origine.
Vecteur directeur $\vec{v}\left|\begin{array}{l} 1 \\ m \end{array}\right.$

Équation cartésienne

$ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$ (tout type de droite)
Vecteur directeur $\vec{v}\left|\begin{array}{l} -b \\ a \end{array}\right.$

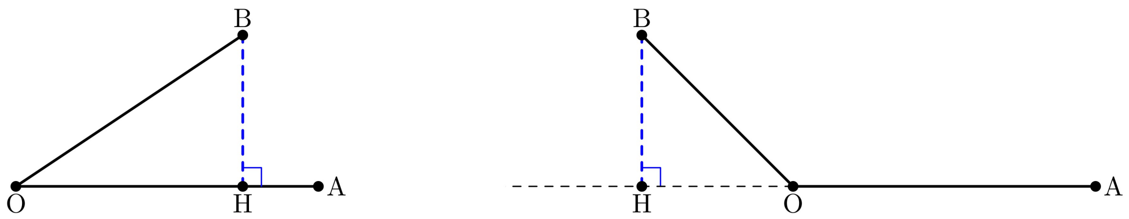
D. Parallélisme

Les droites $D|ax + by + c = 0$ et $\Delta|a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles ssi $ab' - a'b = 0$

5. Produit scalaire de deux vecteurs

A. Projection orthogonale

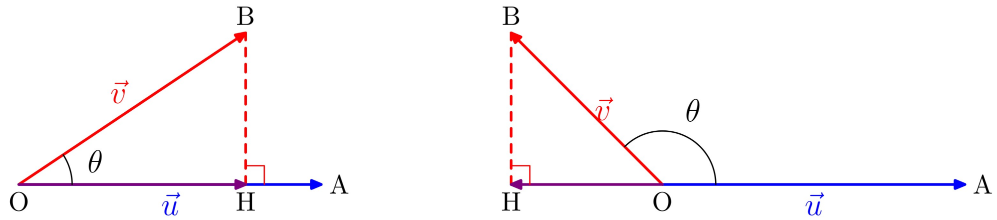
Définition 6.4 Soit O, A et B trois points non-alignés du plan. Le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle OAB. Sur les figures ci-dessous, H est le projeté orthogonal de B sur (OA) :



B. Produit scalaire

Définition 6.5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan.
On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
On appelle *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$ alors, en notant H le projeté orthogonal de B sur (OA),
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$;
  - si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$.



$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$ $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$

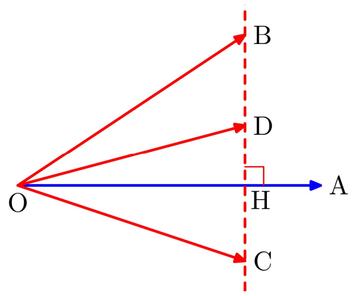
Remarque 1 : En notant θ l'angle (géométrique) formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on remarque que si θ est aigu, le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est positif et si θ est obtu, le produit scalaire est négatif.

Remarque 2 : Le produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par lui-même est noté $\vec{u}^2$. Il est égal à $||\vec{u}||^2$ et on l'appelle *carré scalaire* de $\vec{u}$.

Remarque 3 :

Sur la figure ci-contre, en appliquant la définition, on obtient facilement les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = OA \times OH$$



Conséquence : attention, si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, on ne peut pas conclure que $\vec{v} = \vec{w}$!

Remarque 4 : En physique, le travail d'une force $\vec{F}$ sur un déplacement $\vec{d}$ est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs. Si $||\vec{D}||$ est exprimée en Newton et $||\vec{d}||$ en mètres alors le travail $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ s'exprime en Joule.

Remarque 5 : Pour déterminer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$, on peut aussi projeter orthogonalement le vecteur $\vec{CD}$ sur la droite (AB). On obtient alors un vecteur $\vec{C'D'}$ et on a :

$\vec{u}.\vec{v} = \pm AB \times C'D'$, avec la même règle sur le $\pm$ que dans la définition ??.

C. Vecteurs orthogonaux

Définition 6.6 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Soit O un point du plan et soit A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *orthogonaux* si l'une des deux situations suivantes est réalisée :
- $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires.

On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété 6.3 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux, on a deux cas :
  — si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors le produit scalaire est évidemment nul ;
  — si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non-nuls, avec les notations de la définition ??, on a $(OA) \perp (OB)$, le projeté orthogonal de B sur (OA) est O donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OO = 0$.
- Réciproquement, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Par définition, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm OA \times OH$. On a deux cas possibles :
  — soit $OA = 0$ c'est-à-dire que $\vec{u} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ;
  — soit $OH = 0$ c'est-à-dire que $\vec{v} = \vec{0}$ ou B appartient à la perpendiculaire à (OA) passant par O donc dans les deux cas, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

6. Autres expressions du produit scalaire

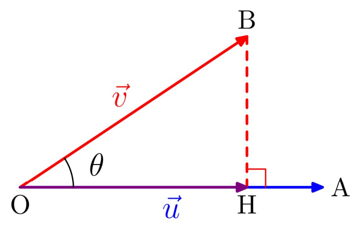
A. Géométriquement

Propriété 6.4 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note θ l'angle (géométrique) formé par ces vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\theta)$$

Démonstration Soit O un point du plan. On note A et B les points du plan tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA). On note θ l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\theta = \widehat{AOB}$.

Premier cas : $\theta \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.

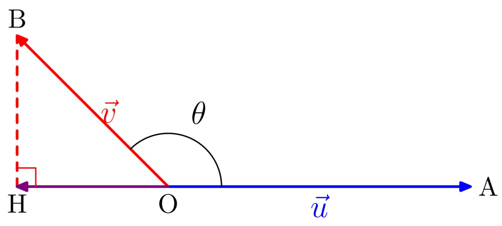


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$$

Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\theta)$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB\cos(\theta) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta)$$

Deuxième cas : $\theta \in [\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$.



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -OA \times OH$$

Dans le triangle OBH rectangle en H on a $OH = OB\cos(\pi - \theta) = -OB\cos(\theta)$. Donc :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -OA \times (-OB\cos(\theta)) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||\cos(\theta)$$

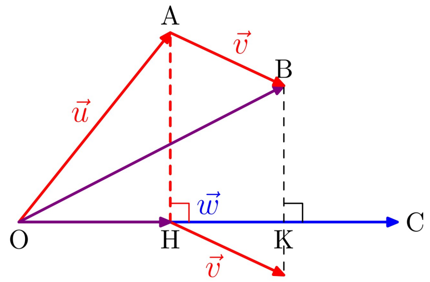
B. Propriétés algébriques

Propriété 6.5 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Soit $k \in \mathbb{R}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}; \quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}; \quad (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

Démonstration

- les première et troisième égalités se démontrent aisément avec la propriété ?? car $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$;
- pour la deuxième : soit O un point du plan, on note A, B et C les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.



En utilisant la remarque ??, on a dans le cas de la figure ci-dessus :
$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = OK \times OC$ et :
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = OH \times OC + HK \times OC = (OH + HK) \times OC = OK \times OC.$
Donc : $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$.

C. Dans un repère orthonormal

Propriété 6.6 Soit $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration On utilise la propriété ??.
On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}+y'\vec{j}) \\
&= (x\vec{i})\cdot(x'\vec{i}) + (x\vec{i})\cdot(y'\vec{j}) + (y\vec{j})\cdot(x'\vec{j}) + (y\vec{j})\cdot(y'\vec{j}) \\
&= xx'\vec{i}\cdot\vec{i} + (xy' + x'y)\vec{i}\cdot\vec{j} + yy'\vec{j}\cdot\vec{j} \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

En effet, en appliquant la propriété ??, le repère étant orthonormal, on a :

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = ||\vec{i}||^2\cos(0) = 1 \text{ et } \vec{i}\cdot\vec{j} = ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}||\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

D. Avec les normes

Propriété 6.7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Démonstration Développons $||\vec{u}+\vec{v}||^2$:

$$\begin{array}{rcl} ||\vec{u}+\vec{v}||^2 & = & (\vec{u}+\vec{v})^2 \\ & = & \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \\ & = & ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} \end{array}$$

On a donc : $2\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$ d'où le résultat.

7. Récapitulatif

Calcul du produit scalaire :
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \times cos(\theta)$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
Si on a les coordonnées $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$
Vecteurs orthogonaux : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
Règles de calcul : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$; $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$; $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$